Юношеская математическая школа
Мат.просвет, 8 класс

Мощности. Счётные и несчётные множества

Определение. Множества X и Y называется равномощными, если существует биекция $f : X \to Y$.

Примечание. Отношение равномощности множеств есть отношение эквивалентности. Только вот на каком множестве? Множества всех множеств не существует...

Определение. Говорят, что множество X не мощнее множества Y, если существует инъекция $f : X \to Y$.

1. Докажите, что X не мощнее Y тогда и только тогда, когда существует сюръекция $f : Y \to X$.

Определение. Множество называется конечным, если в нём конечное количество элементов. Мощностью конечного множества называется количество элементов в нём.

Множество X называается счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В этом случае пишут $|X| = \aleph_0$.

Множество называется не более чем счётным, если оно не мощнее счётного множества.

2. Докажите, что $\mathbb{Z}$ счётно.

Обобщая: докажите, что объединение двух счётных множеств счётно.

3. Докажите, что множество точек на плоскости с целыми координатами счётно.

Обобщая: докажите, что декартово произведение двух счётных множеств счётно.

4. Докажите, что любое не более чем счётное множество конечно или счётно.

5. Докажите, что $\mathbb{Q}$ — счётное множество.

6. a) В столбик выписаны n последовательностей длины n, состоящих только из 0 и 1 (таким образом выписанные числа образуют квадрат). Ясно же (ясно?), что выписаны при этом не все возможные последовательности. Приведите алгоритм, который позволяет найти какую-нибудь невыписанную последовательность.

b) Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.

c) Докажите, что отрезок $[0, 1]$ несчётен. Докажите, что множество вещественных чисел несчётно.

7. Докажите, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.

Домашнее задание

1. a) Докажите, что множество квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами счётно.

b) Дкажите, что множество чисел, являющихся корнями квадратных уравнений с целвми коэффициентами, счётно.

2. Словом называется конечная последовательность букв русского языка (осмысленность не требуется). Докажите, что

a) множество слов, состоящих из не более чем n символов, конечно.

b) множество всех слов счётно.

3. a) Пусть A — множество непересекающихся единичных квадратов на плоскости (стороны квадрата не обязательно параллельны осям координат). Докажите, что A не более чем счётно.

b) Пусть B — множество непересекающихся квадратов на плоскости (стороны квадрата не обязательно параллельны осям координат и могут иметь любую положительную длину). Докажите, что B не более чем счётно.

4. a) Докажите, что множество всех многочленов с целыми коэффициентами счётное число.

b) Докажите, что существует вещественное число, которое не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

Примечания. 1)) Такие числа называются *трансцендентными.* Наиболее известное трансцендентное число — π, но доказать, что оно трансцендентно, очень сложно. Указать явно хотя бы одно трансцендентное число, тоже непросто. А вот доказать, что трансцендентные числа существуют, довольно просто.

2) Числа, которые являются корнями многочленов с целыми коэффициентами, называются *алгебраическими.* К ним относятся все числа, которые вы сможете записать, используя целые числа, арифметические операции и корни. Кроме того, есть ещё много алгебраических чисел, которые не записываются как нагромождение корней и арифметических операций.

Юношеская математическая школа
Мат.просвет, 8 класс

Мощности. Счётные и несчётные множества

Определение. Множества X и Y называется равномощными, если существует биекция $f : X \to Y$.

Примечание. Отношение равномощности множеств есть отношение эквивалентности. Только вот на каком множестве? Множества всех множеств не существует...

Определение. Говорят, что множество X не мощнее множества Y, если существует инъекция $f : X \to Y$.

1. Докажите, что X не мощнее Y тогда и только тогда, когда существует сюръекция $f : Y \to X$.

Определение. Множество называется конечным, если в нём конечное количество элементов. Мощностью конечного множества называется количество элементов в нём.

Множество X называается счётным, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В этом случае пишут $|X| = \aleph_0$.

Множество называется не более чем счётным, если оно не мощнее счётного множества.

2. Докажите, что $\mathbb{Z}$ счётно.

Обобщая: докажите, что объединение двух счётных множеств счётно.

3. Докажите, что множество точек на плоскости с целыми координатами счётно.

Обобщая: докажите, что декартово произведение двух счётных множеств счётно.

4. Докажите, что любое не более чем счётное множество конечно или счётно.

5. Докажите, что $\mathbb{Q}$ — счётное множество.

6. a) В столбик выписаны n последовательностей длины n, состоящих только из 0 и 1 (таким образом выписанные числа образуют квадрат). Ясно же (ясно?), что выписаны при этом не все возможные последовательности. Приведите алгоритм, который позволяет найти какую-нибудь невыписанную последовательность.

b) Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.

c) Докажите, что отрезок $[0, 1]$ несчётен. Докажите, что множество вещественных чисел несчётно.

7. Докажите, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно.

Домашнее задание

1. a) Докажите, что множество квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами счётно.

b) Дкажите, что множество чисел, являющихся корнями квадратных уравнений с целвми коэффициентами, счётно.

2. Словом называется конечная последовательность букв русского языка (осмысленность не требуется). Докажите, что

a) множество слов, состоящих из не более чем n символов, конечно.

b) множество всех слов счётно.

3. a) Пусть A — множество непересекающихся единичных квадратов на плоскости (стороны квадрата не обязательно параллельны осям координат). Докажите, что A не более чем счётно.

b) Пусть B — множество непересекающихся квадратов на плоскости (стороны квадрата не обязательно параллельны осям координат и могут иметь любую положительную длину). Докажите, что B не более чем счётно.

4. a) Докажите, что множество всех многочленов с целыми коэффициентами счётное число.

b) Докажите, что существует вещественное число, которое не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

Примечания. 1)) Такие числа называются *трансцендентными.* Наиболее известное трансцендентное число — π, но доказать, что оно трансцендентно, очень сложно. Указать явно хотя бы одно трансцендентное число, тоже непросто. А вот доказать, что трансцендентные числа существуют, довольно просто.

2) Числа, которые являются корнями многочленов с целыми коэффициентами, называются *алгебраическими.* К ним относятся все числа, которые вы сможете записать, используя целые числа, арифметические операции и корни. Кроме того, есть ещё много алгебраических чисел, которые не записываются как нагромождение корней и арифметических операций.